E CONF SERIES

International Conference on Modern Science and Scientific Studies
Hosted online from Madrid, Spain
Website: econfseries.com 20th December, 2024

НАХОЖДЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ВЕТВЕЙ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $x_1 = x_2 = 0$ С ИПОЛЬЗОВАНИЕМ СТЕПЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Хабибова Амира Улугбековна
Самаркандский государственный университет имени
Шарофа Рашидова, стажёр-исследователь
xabibovaamira@gmail.com, +998950254215

Аннотация

В этой работе рассматривается задача нахождения вещественных ветвей корней алгебраического уравнения высокого порядка с двумя неизвестными в окрестности нулевой точки. Для решения данной задачи в работе используются степенные преобразования переменных x_1 и x_2.

Ключевые слова: Особая точка, унимодулярная матрица, степенное преобразование, ломаная Ньютона, укороченное уравнение, грань.

Пусть $R_j = (r_{1j}, r_{2j})$ – единичный вектор ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Тогда вектор $P_j = (-r_{2j}, r_{1j})$ лежит в конусе $U_j^{(1)}$ и является целочисленным. Пусть унимодулярная матрица α такова, что $P' = \alpha P_j = (-1, 0)$. В матрице $\alpha = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ (1) целые числа s_1 и s_2 подобраны так, чтобы определитель $s_1 r_2 - s_2 r_1 = 1$.

Обратная матрица есть $\beta = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} r_2 & -s_2 \\ -r_1 & s_1 \end{pmatrix}$ (2)

Сделаем замену координат

$$y_1 = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \qquad (3)$$

$$y_2 = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}}$$

с матрицей (1). Согласно формулам имеем

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} = y_1^{r_2 q_1 - r_1 q_2} y_2^{-s_2 q_1 + s_1 q_2} = y_1^{q_1'} y_2^{q_2'}$$

Сумма одночленов $f = \sum_{Q \in D} f_Q \, x_1{}^{q_1} x_2{}^{q_2}$ (4)

перейдет в сумму $f' = \sum_{Q' \in D'} f_Q y_1^{q_1'} y_2^{q_2'}$ (5).

Анологично, многоугольник $\Gamma = \Gamma(f)$ перейдет в многоугольник $\Gamma' = \Gamma(f')$; ребро $\Gamma_j^{(1)}$ перейдет в ребро $\Gamma_j^{(1)'}$, которое ортогонально вектору $P' = (-1, 0)$.

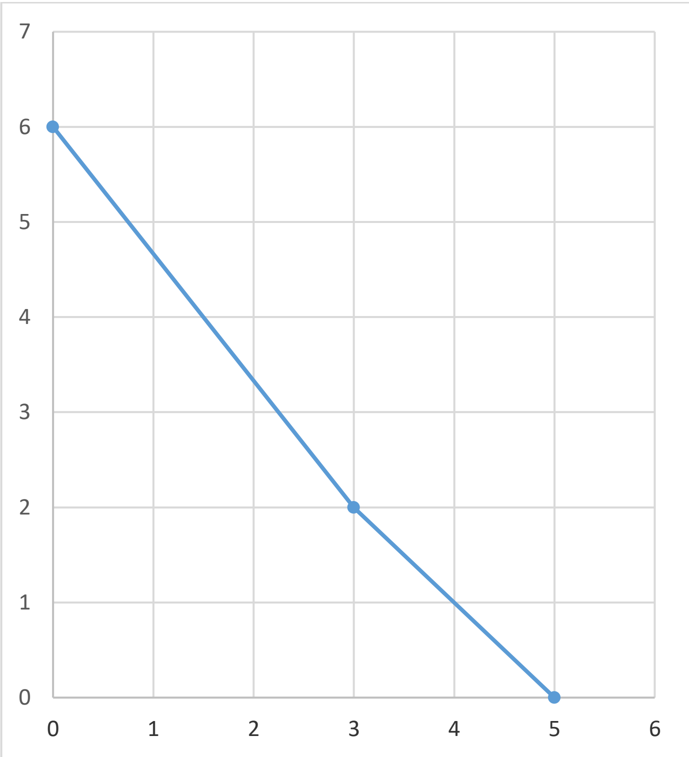
Задача. Найти в окрестности точки $x_1 = x_2 = 0$ вещественные ветви корней уравнения:

$$x_2^6 - x_1^3 x_2^2 - x_1^5 = 0$$
$$f = x_2^6 - x_1^3 x_2^2 - x_1^5$$

Действительно, точка (0, 0) является особой. Так как выполняются равенства $f(X_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -3x_1^2 x_2^2 - 5x_1^4$ и $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2^5 - 2x_1^3 x_2$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) = 0$.

Построим ломаную $\tilde{\Gamma}$.

$D = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$; $Q_1 = (0, 6), Q_2 = (3, 2), Q_3 = (5, 0)$;



Начнем с ребра $\Gamma_1^{(1)} \supset Q_1, Q_2.\,, Q_1 - Q_2 = (-3, 4)$, поэтому $R_1 = (-3, 4)$.

Подберем такие целые числа s_1 и s_2, чтобы выполнялось равенство:
$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4s_1 + 3s_2 = 1.$
Положим $s_1 = 1$ и $s_2 = -1$. Тогда замена (3) есть

$$y_1 = x_1 x_2^{-1}$$
$$y_2 = x_1^{-3} x_2^4$$

И обратно, $$x_1 = y_1^4 y_2$$
$$x_2 = y_1^3 y_2$$

Данное преобразование переводит заданную функцию f в

$$f'(y_1, y_2) = y_1^{18} y_2^6 - y_1^{18} y_2^6 + y_1^{20} y_2^5 = y_1^{18} y_2^5 (y_2 - 1 - y_1^2)$$

Сокращая на y_1^{18}, получим:

$$f_0' = y_1^{-18} f' = y_2^5 (y_2 - 1 - y_1^2);$$

Получим укороченное уравнение:

$$\widetilde{f_0'}(y_2) = f_0'(0, y_2) = y_2^5 (y_2 - 1)$$

Данное укороченное уравнение имеет одно ненулевое решение $y_2^0 = 1$. Данный корень является простым и ему соответствует отдельная простая ветвь решений исходного уравнения $f = 0$. Введем замену $y_2 = 1 + z$. Обозначим

$$g(y_1, y_2) = y_2 - 1 - y_1^2 = 0$$

Подставляя $y_2 = 1 + z$ в $g(y_1, y_2)$, получим:

$$g(y_1, 1 + z) = 1 + z - 1 - y_1^2 = z - y_1^2 = 0$$

Отсюда следует, что $z = y_1^2$. Итак $y_2 = 1 + y_1^2$ есть точное, а не приближенное решение уравнения $f' = 0$.

$$x_1 = y_1^4 (1 + y_1^2) = y_1^4 + y_1^6$$
$$x_2 = y_1^3 (1 + y_1^2) = y_1^3 + y_1^5$$

Рассмотрим теперь ребро $\Gamma_2^{(1)} \supset Q_2, Q_3$. $Q_2 - Q_3 = (-2, 2)$. Соответственно, $R_1 = (-1, 1)$;

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = s_1 + s_2 = 1$$

Положим $s_1 = 1,\ s_2 = 0$. Тогда получим:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_1^{-1} x_2$$

И обратно, $$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_1 y_2$$

Применяя данное преобразование к функции f, получим:

$$f'(y_1, y_2) = y_1^6 y_2^6 - y_1^5 y_2^2 - y_1^5 = y_1^5 (y_1 y_2^6 - y_2^2 - 1)$$
$$f_0' = y_1^{-5} f' = y_1 y_2^6 - y_2^2 - 1$$
$$\widetilde{f_0}'(y_2) = f_0'(0, y_2) = -y_2^2 - 1$$

Корни полученного укороченного уравнения являются комплексными числами $y_2^0 = \pm i$, им отвечают комплексные ветви решения уравнения. И соответственно ребру $\Gamma_1^{(1)}$ не отвечает никакая вещественная ветвь.

Литература:

1. А. Д. Брюно. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1979.
2. А. Д. Брюно. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. - М.: Наука, 1998.
3. A. Soleev, X. Nosirova. Darajali geometriyaning chiziqli boʻlmagan masalalarga qoʻllanishi.- Samarqand, 2013.
4. A. D. Bruno, A. B. Batkhin. Algorithms and programs for calculating the roots of polynomial of one or two variables.- Programming and computer software, 2021, Vol. 47, №5.