E CONF SERIES

International Conference on Modern Science and Scientific Studies
Hosted online from Madrid, Spain
Website: econfseries.com 20th January, 2025

FAZODAGI TO'G'RI BURCHAKLI KOORDINATALAR SISTEMASI

Usmonov Baxtiyor Islomovich ,
Hamzayev Baxtiyor Amirovich ,
Ne'matov Shuxrat O'ktamovich ,
Sharof Rashidov Nomidagi Samarqand Davlat
Universiteti Akademik Litseyi Matematika Fani O'qituvchilari

Annotatsiya:
Ushbu maqolada asosan stereometriya haqida tushincha va ikki nuqta orasidagi masofaga doir masalalar haqida va kesmalar haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Fazo, matematika,Kesma manbalar, geometriya, fazo tushunchasi, to'g'ri burchakli uchburchak , matematik qonunlar.

Mavzu: Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi.
Reja:
1. Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi.
2. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa.
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
4. Masalalar yechish.

Tekislikda xOy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi aniqlangan bo'lsin. Agar biror A nuqtaning tekislikdan chetlanishini qo'shimcha ravishda ko'rsatish zarur.

Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini kiritamiz. Faraz qilaylik, uchta o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziq O nuqtada kesishsin. Har bir to'g'ri chiziqda yo'nalishini aniqlab, Ox, Oy, Oz kabi belgilanadigan koordinatalar o'qlarini hosil qilamiz, bunda Ox – abssissalar o'qi, Oy – ordinatalar o'qi, Oz – applikatalar o'qi deyiladi.

Koordinatalar o'qlari yana uchta koordinatalar tekisligini aniqlaydi: yOz tekislik, unda (0; y; z) ko'rinishdagi nuqtalar yotadi, xOz tekislik, unda (x; y; 0) ko'rinishdagi nuqtalar yotadi, xOz tekislik, unda (x; 0; z) ko'rinishdaga nuqtalar yotadi.

Agar berilgan nuqta Ox, Oy yoki Oz o'qda yotsa, mos ravishda, uning koordinatalari (x; 0; 0),
(0; y; 0), (0; 0; z) ko'rinishni oladi.

A nuqta – fazodagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. A nuqtaning xOy tekislikka A_1 proyeksiyani yasaymiz, A_1 nuqta tekislikda ikkta, x va y koordinatalarga ega bo'ladi. Bu ikkta koordinatalarni berilgan A nuqtaga mos qilib qo'yamiz va ulardan x ni A nuqtaning abssissasi, y ni esa uning ordinatasi deb aytamiz. A nuqtaning xOy tekislikdan chetlanishini ko'rsatish uchun uchinchi z koordinatani kiritamiz. Agar AA_1 chetlanish Oz o'qining musbat yo'nalishda joylashgan bo'lsa, z koordinata „+" (musbat) ishora bilan, chetlanish qarama – qarshi yo'nalishda joylashgan bo'lsa, „-" (manfiy) ishora bilan olinadi. z koordinata A nuqtaning applikatasi deyiladi va A nuqtaning koordinatalari A (x; y; z) kabi yoziladi.

xOy tekislikda A_1 nuqtaning koordinatalarini yasashda A_1 nuqtadan $A_1A_2 \perp Oy, A_1A_3 \perp Ox$ to'g'ri chiziqlar o'tkazib, A nuqtani A_1 va A_3 nuqtalar bilan tutashtiramiz. U holda (uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra) $A_1A_2 \perp Ox, AA_3 \perp Oy$ bo'ladi.

Demak, A nuqtaning koordinatalar o'qlariga proyeksiyalarning algebraik qiymatidan iborat ekan. Bundan A nuqtani koordinatalari bo'yicha yasash usuli kelib chiqadi.

Misol. A (2; - 3; 5) nuqtani yasang.

Yechilishi. Ox o'qda $|OA_2| = 2$ kesmani joylashtiramiz va A_2 nuqta oraliq $A_2A_1 \parallel Oy$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqda A_2 nuqtadan manfiy yo'nalishda $|A_2A_1| = 3$ kesmani joylashtiramiz. So'ngra A_1 nuqtadan $A_1A \perp xOy$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz va musbat yo'nalishda $|A_1A| = 5$ kesmani joylashtiramiz. Yasalgan nuqta talab qilingan A(2; - 3; 5) nuqta bo'ladi.

Fazoda ikkta $A(x_1; y_1; z_1)$ *va* $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalarning xOy tekislikka proyeksiyalarini A_1 va B_1 deb belgilaymiz. Yasalishiga ko'ra, $A_1(x_1; y_1; 0)$ *va* $B(x_2; y_2; 0)$ bo'ladi A_1 va B_1 nuqtalar xOy tekislikda yotganligidan, A_1 B_1 kesmaning uzunligi $|A_1B_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (1) bo'ladi.

A nuqtadan $AF \perp BB_1$ to'g'ri chiziqi o'tkazamiz. U holda, to'g'ri to'rtburchakning qarama – qarshi tomonlari sifatida, $AF = A_1B_1$, $AA_1 = FB_1$ bo'ladi.

Bundan $BF = |z_2 - z_1|$ bo'ladi va to'g'ri burchakli ΔABF dan Pifagor teoremasiga asosan,

$AB^2 = AF^2 + BF^2, |AB| = \sqrt{A_1B_1{}^2 + BF^2}$ (2) bo'lishini topamiz.

(2) dagi A_1 B_1 va BF larning qiymatlarini o'rniga qo'yib, fazodagi masofa uchun $d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (3) formulani olamiz.

Izoh. (3) formula to'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari $|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|$ bo'lganda, uning diagonali xossasini ifodalaydi.

1 – masala. Oy o'ada N (-2; 4; 6) nuqtadan 11 sm uzoqlikda joylashgan nuqtani toping.

Yechilishi. Izlanayotgan K nuqta Oy o'qida yotganligidan, uning koordinatalari K(0; y; 0) bo'ladi. K va N nuqtalar orasidagi KN = 11 sm masofa uchun (3) formulani koordinatalar bo'yicha yozamiz: $\sqrt{(+2)^2(y-4)^2 + (-6)^2} = 11.$ Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'taramiz: $4 + (y-4)^2 + 36 = 121,$ $(y-4)^2 = 121 - 40 = 81$ va quyidagi qiymatlarni olamiz. $y - 4 = \pm 9,$ $y_1 = 13,$ $y_2 = -5.$

Shunday qilib, Oy o'qda $K_1(0;\,13;\,0)\ va\ K_2(0;-5;0)$ nuqtalar topildi hamda N nuqtadan ularning har birigacha bo'lgan masofa 11 sm ga teng.

Javob: $K_1(0;13;0), K_2(0;-5;0).$

2 – masala. Fazoda $A(3;0;-1), B(-4;1;0), C(5;-2;-1)$ nuqtalar berilgan. yOz tekislikda A, B, C nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtani topib.

Yechilish. Izlanayotgan nuqta yOz tekislikda yotganligidan, uning uchun x = 0 bo'lib, koordinatalar $K(0;y;z)$ ko'rinishda bo'ladi. K nuqtadan A, B, C nuqtalargacha bo'lgan masofalarni topamiz: $AK = \sqrt{(0-3)^2 + y^2 + (z+1)^2}$; $BK = \sqrt{(0+4)^2 + (y-1)^2 + z^2}$, $CK = \sqrt{(0-5)^2 + (y+2)^2(z+1)^2}$.

Shartga ko'ra, AB = BK =CK. Shu sababli

$$\begin{cases} AK^2 = BK^2, \\ AK^2 = CK^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 16 + y^2 - 2y + 1 + z^2, \\ 9 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 25 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 17 - 10, \\ 4y = -20. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini yechamiz; $\begin{cases} y = -5, \\ z = \dfrac{17}{2}. \end{cases}$

U holda izlanayotgan nuqta $K\left(0; -5; \dfrac{17}{2}\right)$ bo'ladi. Javob: $K\left(0; -5; \dfrac{17}{2}\right)$.

3 – masala. Uchlari A (9; 3; -5), B (2; 10; -5), C (2; 3; 2) nuqtalarda yotgan ΔABC berilgan bo'lsa, uning perimetrini toping. Uchburchak tomonlarining uzunliklarini yuqorida keltirib chiqiarilgan ikki nuqta orasidagi masofa formuladan, ya'ni $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ formuladan foydalanib topamiz. Bunda

$AB = \sqrt{(2-9)^2 + (10-3)^2 + (-5+5)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$,

$AC = \sqrt{(2-9)^2 + (3+3)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$, bo'adi. Shunday qilib,

$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (3-10)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$

uchburchak teng tomonli va uning perimetri $p = 3 \cdot 7\sqrt{2} = 21\sqrt{2}$ ekan.

Fazoda uchlarning koordinatalari $A(x_1; y_1; z_1)$ *va* $B(x_2; y_2; z_2)$ bo'lgan AB kesma berilgan va P nuqta AB kesmani λ nisbatda bo'lsin, ya'ni $\lambda = \dfrac{AP}{PB}$. P (x; y; z) nuqtaning koordinatalarini A va B nuqtalarning koordinatalari va λ qiymat orqali ifodalaymiz. Berilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida AB kesmani xOy tekislikka proyeksiyalaymiz. Faraz qilaylik, A, B va P nuqtalarning proyeksiyalari, mos ravishda, A_1, B_1, P_1 bo'lsin A_1, B_1 *va* P_1 nuqtalar xOy tekislikda yotganligdan, ular uchun z = 0 va ularning koordinatalari $A_1(x_1; y_1; 0)$, $B_1(x_2; y_2; 0)$, $P_1(x; y; 0)$ kabi bo'ladi.

Bundan tashqari, AA_1, BB_1 *va* PP_1 to'g'ri chiziqlar parallel va shuning uchun ular bitta tekislikda yotadi. Fales teoremasiga ko'ra, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{A_1P_1}{P_1B_1} = \lambda$ deb yozish mumkin.

Endi xOy tekislikdagi A_1 B_1 kesma va P_1 nuqta uchun kesmani berilgan λ nisbatdan bo'lishi haqidagi masalani qarab, P_1 nuqtaning koordinatalari uchun $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ tengliklarni olamiz.

AB kesmani xOz va yOz tekisliklarga ketma – ket proyeksiyalab, P nuqtaning bu tekisliklardagi proyeksiyalari uchun, mos ravishda, $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ tengliklarni olamiz.

Shunday qilib, berilgan AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $P(x_1;\, y_1; z)$ nuqtaning koordinatalari kesmaning A va B uchlari koordinatalari orqali $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ (4) formulalar bo'yicha topiladi.

Agar P nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lsa, $\lambda=1$ bo'ladi va (4) formulalar quydagi ko'rinishga keldi: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ (5) formulalar kesmani teng ikkiga bo'lish formulalari deyiladi.

4 – masala. Uchlari $A(1;-1;-3)$, $B(2;1;-2)$, $C(-5;2;-6)$ nuqtalarda yotgan ΔABC berilgan bo'lsa, uning ichki A burchagi AD bissekterisasi uzunligini toping.

Yechilishi. AD – A burchakning bissektrisasi bo'lsin. D nuqtaning koordinatalarini topamiz. Uchburchak burchagi bissektrisasining xossasidan D nuqta BC kesmani $\lambda=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ nisbatda bo'ladi. λ ni aniqlash maqsadida AB va AC tomonlar uzunliklarini topamiz:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6},$$
$$AC=\sqrt{(-5-1)^2+(2+1)^2+(-6+3)^2}=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}.$$

U holda $\lambda=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$ bo'ladi.

Endi kesmani berilgan $\lambda=\frac{1}{3}$ nisbatda bo'lishi formulalaridan D nuqtaning koordinatalarini topamiz:

$$x=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{1-\frac{1}{3}\cdot 5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4};\ y=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{1+\frac{1}{3}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{4};\ z=\frac{z_B+\lambda z_C}{1+\lambda}=\frac{-2-\frac{1}{3}\cdot 6}{1+\frac{1}{3}}=-3.$$

So’ngra AD bissektrisa uzunligini A va D nuqtalar orasidagi masofa kabi topamiz:

$$AD=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-1\right)^2+\left(\frac{5}{4}+1\right)^2+(-3+3)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{81}{16}}=\frac{3\sqrt{10}}{4}.\quad \text{Javob: } \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

kelib chiqadi.

Javob: D (-1; -3; -9).

A,B C guruh masalalaridan yechish.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. I. Israilov, Z.A. Pashayev Geometriya. Toshkent 2004 yil
2. A.V. Pogorelov Geometriya 7-11 Toshkent 1993 yil.