E CONF SERIES
International Conference on Modern Science and Scientific Studies
Hosted online from Madrid, Spain
Website: econfseries.com 20th December, 2024

TARMOQLANUVCHI JARAYONLARNING KLASSIK NAZARIYASI

Berdiyeva Mahliyo Islom qizi
Qarshi davlat universiteti Ehtimollar nazariyasi
va matematik statistika yo'nalishi magistranti

Annotatsiya:
Maxsus funksiyalar matematik analiz va uning qo'llanilishlarida muhim muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Ular o'zining keng ko'lamdagi qo'llanilishlari, jumladan, ehtimolliklar nazariyasida katta ahamiyatga ega. Ehtimollik nazariyasi va matematik statistikada maxsus funksiyalar ehtimollik taqsimotlarining xususiyatlarini tahlil qilishda qo'llaniladi va stoxastik jarayonlar modelida ahamiyatli rol o'ynaydi. Maxsus funksiyalar ko'p hollarda qiyin hisoblanadigan integral va funksiyalarni soddalashtirishga yordam beradi, bu esa ularni nazariy tadqiqotlar va amaliy masalalar uchun foydali qiladi.

Kalit so'zlar: Funksiya, matematik analiz, ehtimollar nazariyasi, stoxastik jarayon, ta'rif, to'plam, maxsus funksiya.

Abstract:
Special functions are of great importance in mathematical analysis and its applications. They have a wide range of applications, including the theory of probabilities. In probability theory and mathematical statistics, special functions are used to analyze the characteristics of probability distributions and play an important role in the model of stochastic processes. Special functions help to simplify integrals and functions that are often difficult, making them useful for theoretical studies and practical problems.

Keywords: Function, mathematical analysis, probability theory, stochastic process, definition, set, special function.

Аннотация:
Специальные функции имеют большое значение в математическом анализе и его приложениях. Они имеют широкий спектр приложений, включая теорию вероятностей. В теории вероятностей и математической статистике специальные функции используются для анализа характеристик вероятностных распределений и играют важную роль в модели случайных процессов. Специальные функции помогают упростить интегралы и функции, которые часто бывают трудными, что делает их полезными для теоретических исследований и практических задач.

Ключевые слова: Функция, математический анализ, теория вероятностей, случайный процесс, определение, множество, специальная функция.

Diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlar

Bu paragrafda biz Galton-Vatson jarayonining ta'rifini keltiramiz va bu jarayonlarning matematik asosda bayonini tahlil qilamiz. Faraz qilaylik dastlabki vaqtdagi zarralar to‘plami nolinchi avlod bo‘lib o‘zlaridan birinchi avlodni qoldirishsin. Biz $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ lar orqali nolinchi, birinchi, ikkinchi va hokazo avlodlardagi zarralar sonini belgilaymiz. Asosiy shartlarni kiritamiz:

1) agar n -avloddagi zarralar soni ma'lum bo‘lsa, $n+1$-avloddagi zarralar soni $n-1$-avloddagi zarralar soniga bog‘liq emas. Yoki, boshqacha aytganda, fiksirlangan vaqtda kelajak o‘tmishga bog‘liq emas. Ya'ni, $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ ketma-ketlik Markov zanjirini tashkil etadi. Bu zanjirning o‘tish ehtimolliklari vaqtga nisbatan bir jinsli;

2) zarrachalar o‘zaro ta'sirga ega emas. Bitta zarracha qoldirayotgan yangi avloddagi zarrachalar soni muayyan avloddagi mavjud barcha zarrachalar soniga bog‘liq emas.

Keyingi mulohazalarimizda zarrachalar populyatsiyasi faqat bir xil tipdagi individuumlardan tashkil topgan va bu individuumlar muayyan taqsimot qonuni asosida o‘zlari kabi tipdagi zarrachalarga aylanishadi yoki hosil qilishadi deb faraz qilamiz. Yuqorida aytib o‘tilgani kabi jarayon boshidagi zarrachalar to‘plamini nolinchi avlod vakillari deb ataymiz. Ular taqsimot qonuni asosida keyingi, birinchi avlod zarrachalariga aylanishadi. Bu zarrachalar to‘plami, o‘z navbatida, ikiinchi avlod zarrachalariga aylanishadi va hokazo. Ta’kidlab o‘tamizki, shartlarga ko‘ra, har bir avlod zarrachalari uchun ko‘payish qonuni vaqtga nisbatan bir jinsli, ya’ni bu qonun vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi.

Faraz qilaylik, har bir zarracha p_k ehtimoliy qonun bilan $k \in \mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}, \ \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\})$ sondagi zarrachalarga aylanadi va bu qonun zarrachalarning boshqa o‘tmishiga, muayyan avloddagi populyatsiya hajmiga bog‘liq emas. Umumiylikka ziyon keltirmasdan qaralayotgan tarmoqlanuvchi jarayonning boshida nolinchi avlod vakillarining soni birga teng deb hisoblaymiz, ya’ni

$$\mathsf{P}\{Z_0 = 1\} = 1.$$

Endi Galton-Vatson jarayonining matematik bayoniga o‘tamiz. Bu jarayon matematik nuqtai nazardan quyidagicha ta’riflanishi mumkin. Quyidagi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$Z_0 = 1, \ Z_1, \ Z_2, \ \ldots .$$

Bu miqdorlar nomanfiy butun qiymatlarni qabul qilsin, deb faraz qilamiz. Ularni avlodlar ketma-ketligida jarayonda ishtirok etuvchi zarrachalar populyatsiyasining hajmi (soni) sifatida talqin etamiz. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\mathsf{P}\{Z_1 = k\} = p_k, \quad k \in \mathbb{N}_0 .$$

Ya’ni jarayonning nolinchi momentida mavjud zarrachalar soni bitta va u p_k ehtimollik bilan k sondagi zarrachaga aylanadi. Bu zarrachalarni birinchi avlod vakillari deb ataymiz. Keyinchalik esa birinchi avlod zarrachalari mavjud boshqa zarrachalar soni va ularning o‘tmishiga bog‘liq bo‘lmagan holda ikkinchi avlod vakillariga aylanishadi. Bunday aylanishning taqsimot qonuni ushbu

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

shartga bo‘ysunadi.

Shunday qiliб, $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi rekurrent munosaбat yordamida aniqlanadi:

$$Z_0 = 1, \quad Z_k = \sum_{j=0}^{Z_{k-1}} x_{k,j}\,, \tag{1.1}$$

bu yerda $\{x_{k,j},\ k, j \in \mathbb{N}\}$ ketma-ketlik o‘zaro bog‘liqsiz va umumiy $\{p_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ qonun bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidir. Bu yerda $x_{k,j}$ miqdorlar k- avloddagi j- zarrachaning avlodi sifatida interpretatsiya qilinadi. Yuqoridagi kabi aniqlangan ushbu

$$Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ \ldots \tag{1.2}$$

ketma-ketlik $\{p_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ taqsimot qonuni bilan berilgan tasodifiy Galton–Vatson jarayoni deb ataladi.

Keltirilgan ta’rifga ko‘ra $\{Z_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ ketma-ketlik bir jinsli Markov zanjirini tashkil etadi.

Endi Galton–Vatson jarayonining o‘tish ehtimolligi uchun quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$p_{ij}^{(k)} := \mathsf{P}\{Z_{n+k} = j \mid Z_n = i\}, \quad k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Oxirgi ifodaning mazmuni shuki, $\{Z_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ Markov zanjiri $i \in \mathbb{N}$ holatdan k vaqt birligi davomida $j \in \mathbb{N}$ holatga $p_{ij}^{(k)}$ ehtimollik bilan o‘tadi. U holda (1.1) rekurrent munosabatdan kelib chiqadiki, (1.2) ketma-ketlik bilan berilgan tarmoqlanuvchi jarayonning holatlar to‘plami kengaytirilgan natural sonlardan iborat bo‘lgan bir jinsli Markov zanjirini tashkil etadi. Bu zanjirning o‘tish ehtimolliklari uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$p_{ij} := p_{ij}^{(1)} = p_{1j}^{*i} = \sum_{j_1+\ldots+j_i=j} p_{1j_1} p_{1j_2} \ldots p_{1j_i}\,, \tag{1.3}$$

[1, c. 12] bu yerda ushbu * belgi taqsimotlar kompozitsiyasini bildiradi. Xususan, quyidagi tenglik o‘rinli:

$$p_{1j} = \mathrm{P}\{Z_1 = j\} = p_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Bundan keyingi mulohazalarimizda eng sodda (trivial) holdan yiroqlashish maqsadida faraz qilamizki,

$$p_0 > 0, \quad p_0 + p_1 \neq 1.$$

Keyingi paragraflarda biz diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlarni sinflarga ajratamiz va bitta holni o‘rganamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. Москва, «Наука», 1971. 436 стр.
2. K.B.Athreya, P.E.Ney, Branching processes, Springer, New York, 1972.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. URSS, Москва, 2009.
4. Имомов А.А. Об одном виде условия невырождения ветвящихся процессов. Узбекский математический журнал. 2, 2001. сс.46–5
5. Ватутин В.А. Ветвящихся процессы и их применения, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2008
6. Feller W. Diffusion processes in genetics. // Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. – Berkeley, 1951. –P. 227-246.
7. Lamperti J. The limit of a sequence of branching process. // Z. Wahr., 1967, -V. 7, -P. 271-288.
8. Бадалбаев И.С., Рахимов И.У. Неоднородные потоки ветвящихся процессов. – Ташкент, “Фан”, 1993. –156 с.
9. Алиев С.А. Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией. // Укр.мат.журн. 1985. Т.37. -№ 5. -С. 656-659.
10. Kawazu K., Watanabe S. branching processes with immigration and related limit theorems. // Теор. вер. и ее примен. 1971 -Т.16. Вып. 1. -С.34-51.
11. Wei C. Z., Winnicki J. Some asymptotic results for the branching process with immigration. // Stoch. Process. Appl. 1989, -V. 31. -P. 261-282.
12. Sriram T.N., Invaliditity of bootstrap for critical branching processes with immigration. //Ann. Statist. 1994. -V. 22. -P. 1013-1023.

13. Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M.C.A. Fluctuation limits of branching processes with immigration and estimation of the means// Adv.Appl. Probab. 2005. -V.37. -P.523-538.
14. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.